MATEMÁTICA 2 - Verano 2020

Práctica 7 - Forma de Jordan

En lo que sigue se nota con $m_A(t)$ el polinomio minimal de una matriz A.

1. Calcular el polinomio característico y el polinomio minimal de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Determinar la forma y una base de Jordan de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ tal que $m_A(t) = t^3$. Determinar las posibles formas de Jordan de A.
   (b) Sea $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotente tal que $\mathrm{rg}(A) = 6$. ¿Cuántos bloques tiene la forma de Jordan de A? ¿Y si $A \in \mathbb{C}^{16\times 16}$ con $\mathrm{rg}(A) = 9$?

4. Hallar la forma y la base de Jordan para cada una de las matrices siguientes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ tal que $m_A(t) = t^6$, y sea $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ una base de Jordan para A. Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5.

6. Hallar la forma y una base de Jordan de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz siguiente para cada valor de $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Determinar la forma de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ con autovalores $\lambda_1,\ \lambda_2$ y λ_3 distintos tal que:

$$\begin{array}{llll} \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I)=13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I)^2=11, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I)^3=10, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I)^4=10 \\ \mathrm{rg}(A-\lambda_2 I)=13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2 I)^2=11, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2 I)^3=10, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2 I)^4=9, \\ \mathrm{rg}(A-\lambda_3 I)=13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_3 I)^2=12, & \mathrm{rg}(A-\lambda_3 I)^3=11. & \end{array}$$

9. Decidir si las matrices siguientes son semejantes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. Calcular para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

11. Hallar una fórmula general para el término general a_n de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida por:

$$a_0=\alpha,\ a_1=\beta\ ,\ a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1},\ \forall\ n\in\mathbb{N}, \quad \text{donde} \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

12. (a) Calcular e^{At} para las matrices A siguientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) &= 3x(t)-y(t) \\ y'(t) &= x(t)+y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0)=1$, $y(0)=2$.

(c) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) &= 3x(t)+y(t) \\ y'(t) &= -x(t)+y(t) \\ z'(t) &= -x(t)-y(t)+3z(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales arbitrarias $x(0)=a$, $y(0)=b$, $z(0)=c$.